Cevap Anahtarı

Grup Teori Dersi Vize Soruları

22.11.2019

1- G grubu A kümesi üzerine etki etsin. "$\forall a,b \in A$ için $a \sim b \Leftrightarrow ga = b$ olacak biçimde $g \in G$ varsa" ile tanımlanan $\sim$ A üzerinde bir denklik bağıntısıdır gösteriniz, ayrıca $Orb_G(a)$ ve G_a kümelerini tanımlayınız.

2- G bir p grup ve $|G| = p^2$ ise G değişmelidir, gösteriniz.

3- G çarpımsal bir grup olmak üzere

$$*: (G \times G) \times G \longrightarrow G$$

$$((a,b),y) \longrightarrow (a,b) * y = ayb^{-1}$$

ile tanımlanan $*$ dönüşümü $G \times G$ grubunun G üzerine bir etkisidir, gösteriniz.

4- G sonlu bir grup A sonlu bir G-küme olsun. $\forall a \in A$ için $|Orb_G(a)| = [G : G_a]$ olduğunu gösteriniz.

Prof. Dr. Şenol Eren

Not
1) Her soru eşit puanlıdır.
2) Süre 90 dakikadır.
3) İstediğiniz sorudan başlayabilirsiniz.
4) Soru kağıdına soru cevaplamayınız.
5) Başarılar dilerim

1- $\forall a \in A$ için $ea = a$ olduğundan $a \sim a$ dır.

$a \sim b$ olsun $ga = b$ olacak şekilde $\exists g \in G$ var

$a = g^{-1}b$ olup $b \sim a$ dır.

$a \sim b \wedge b \sim c$ olsun. $ga = b \wedge g'b = c$, $\exists g, g' \in G$ var.

$g'(ga) = c \Rightarrow (g'g)a = c \Rightarrow g'g \in G$ var

$a \sim c$ olup denklik bağıntısıdır.

$Orb_G(a) = \{ga \mid g \in G\}$ $G_a = \{g \in G \mid ga = a\}$

2- $Z(G)=G$ olduğunu göstermeliyiz.

$Z(G)\neq G$ olsun. $|Z(G)|\neq p^2$ ve $|Z(G)|\,|\,p^2$ olduğundan $Z(G)>1$ olup $|Z(G)|=p$ olabilir. $a\in G\setminus Z(G)$ için $H=C_G(a)$ olsun. $Z(G)\leq H$, $a\in H$, $a\notin Z(G)$ olduğundan $Z(G)<H$ dir. $p<|H|$ demektir. $|H|\,|\,p^2$ olduğundan $|H|=p^2$ $C_G(a)=G$ olup $a\in Z(G)$ çelişkisi bulunur. O halde $G=Z(G)$ dir.

3- $*:(G\times G)\times G\longrightarrow G$, $((a,b),y)=ayb^{-1}$

i) $(e,e)\in G\times G$ ve $\forall y\in G$ için $(e,e)*y=eye^{-1}=y$.

ii) $\forall (a,b),(c,d)\in G\times G$ ve $\forall y\in G$ için

$$
\begin{aligned}
((a,b).(c,d))*y=(ac,bd)*y &= (ac)y(bd)^{-1}\\
&= (ac)y(d^{-1}b^{-1})\\
&= a(cyd^{-1})b^{-1}\\
&= a((c,d)*y)b^{-1}\\
&= (a,b)*((c,d)*y)
\end{aligned}
$$

4- $B=\{gG_a \mid g\in G\}$ olsun. $|B|=[G:G_a]$ dir.

Çünkü $G/G_a=\{gG_a \mid g\in G\}$ $|B|=|Orb_G(a)|$ gösterelim.

$$
\begin{aligned}
f: Orb_G(a) &\longrightarrow B\\
ga &\longrightarrow f(ga)=gG_a
\end{aligned}
$$

$ga=ha \iff h^{-1}(ga)=a \iff h^{-1}g\in G_a \iff gG_a=hG_a$ olup f iyi tanımlı ve 1-1 dir. $\forall\, gG_a\in B$ için $f(ga)=gG_a$ olacak şekilde $ga\in Orb_G(a)$ var olup f örtendir.